УДК 551.583

В. В. КОВАЛЕНКО (РГГМУ)

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ВОДНЫМ РЕЖИМОМ РЕКИ СЫРДАРЬИ

В статье рассматривается общая постановка задачи об оптимальном управлении, т. е. выборе таких воздействий на участке Токтогульская ГЭС — Кайраккумская ГЭС, чтобы формирующийся водный режим удовлетворял заданным условиям (был допустимым и в некотором смысле наилучшим). Основные понятия, которыми мы будем пользоваться, — это «состояние системы» и «состояние управления». Ранее было показано [1, 2], что приемлемыми моделями для рассматриваемого участка являются либо динамическая модель в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_{i+1}}{dt} = -\frac{1}{\tau_{i+1,i}} Q_{i+1} + \frac{1}{\tau_{i+1,i}} Q_i + \frac{1}{\tau_{i+1,1}} \widetilde{Q}_{i+1,i}, \qquad (1)$$

либо стохастическая модель в виде следующей системы:

$$\frac{dm_{i+1}}{dt} = \left(-\frac{\overline{1}}{\tau_{i+1,i}} + \frac{1}{2} G_{\widetilde{c}}\right) m_{i+1} - \frac{1}{2} G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} + \left[\frac{\overline{1}}{\tau_{i+1,i}} m_i - \frac{\overline{1}}{\tau_{i+1,i}} Q_{i+1,i}\right], \qquad (2)$$

$$\frac{dD_{i+1}}{dt} = 2\left(-\frac{\overline{1}}{\tau_{i+1,i}} + \frac{1}{2} G_{\widetilde{c}}\right) D_{i+1} + G_{\widetilde{c}} D_{i+1} - 2G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} m_{i+1} + G_{\widetilde{N}}, \qquad (3)$$

где i — «координаты» пространственных узлов; $\tau_{i+1,i}$ — время добегания между i и $i+1$ узлами; Q — расход воды; $\widetilde{Q}_{i+1,i}$ — расход, идущий на водозабор, фильтрацию, испарение и т. п.; m — математическое ожидание расхода; $G_{\widetilde{c}}$, $G_{\widetilde{N}}$, $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$ — интенсивности и взаимная интенсивность белых шумов; D — дисперсия расхода воды. Стохастической моделью может служить и просто дифференциальное уравнение для математического ожидания (2), отличающееся от (1) учетом действующих на участке шумов различного происхождения. В этом случае модель запишем в следующем виде:

$$\frac{dQ}{dt} = aQ + bu + u_б + c, \qquad (4)$$

где

$Q = m_{l+1}$; $u = m_i$; $u_б = \widetilde{Q}_{i+1,l}$; $a = \left(-\frac{\tilde{\bar{1}}}{\tau_{l+1,i}} + 0{,}5G_{\tilde{c}}\right)$; $b = \frac{\tilde{\bar{1}}}{\tau_{l+1,i}}$;
$c = -0{,}5G_{\widetilde{cN}}$.

Если считать $\tau = f(Q)$, то модель (4) будет нелинейной, но приведенные ниже рассуждения останутся в силе. В случае рассмотрения реального процесса в динамической идеализации приходим к модели (1), которая также может быть записана в форме (4) с соответствующим изменением коэффициентов. В уравнении (4) в качестве вектора состояния выступают переменные (Q, u), которые обозначим одной буквой Q. В качестве управления — вектор $u_б$, т. е. те составляющие бокового притока (оттока), которыми мы можем распоряжаться по своему усмотрению (водораспределение для потребителей). Некоторые составляющие $u_б$ могут быть известны и не подлежать регулированию, например приток рек Карадарья и Карасу или составляющие руслового водного баланса (РВБ), хотя последние можно в известном смысле рассматривать как регулируемые воздействия, когда вектор состояния (расходы в русле) и, следовательно, площадь водного зеркала и уровни определяют интенсивность фильтрации или испарения с водной поверхности.

Если речь идет об участке, следующем за Токтогульской ГЭС (это может быть и весь участок до Кайраккумской ГЭС), то составляющая u вектора (Q, u) также может рассматриваться как управление (график попусков с ГЭС). В то же самое время все составляющие вектора $u_б$ могут быть заданы (жестко регламентированная подача воды потребителям, не подлежащая «обсуждению»). В зависимости от конкретной ситуации можно использовать разные из рассмотренных выше вариантов, что, однако, не сказывается на формальной постановке задачи об оптимальном управлении.

Запишем (4) в виде

$$\frac{dQ}{dt} = f(t, Q, u). \tag{5}$$

В начальный момент времени t_0 заданы расходы в расчетных створах на рассматриваемом участке, т. е. задано начальное состояние $Q(t_0) = Q_0$. Будем считать, что $t_0 = 0$, а момент окончания процесса $t = T$. Если на промежутке $0 \leqslant t \leqslant T$ задано управление процессом $u(t)$, то (5) есть система дифференциальных уравнений относительно неизвестной вектор-функции $Q = Q_{i+1}$, $i = 1, 2 \ldots$. Решение этой системы $Q(t)$ при известном $Q(t_0) = Q_0$ есть траектория, отвечающая заданному управлению $u(t)$, а пара $Q(t)$ и $u(t)$ называется допустимым процессом. Мы не останавливаемся на ограничениях, которые должны выполняться, чтобы процесс был действительно допустимым. Далее в рассмотрение вводится функционал $\mathscr{L}$ (критерий качества), задаваемый на множестве допустимых процессов $Q(t)$ и $u(t)$, и задача оптимального управления состоит в выборе такой конкретной пары $\overline{Q}(t)$, $\overline{u}(t)$, на которой функционал $\mathscr{L}$ достигает экстремального значения (это и будет оптимальный процесс с оптимальными траекторией $\overline{Q}(t)$ и управлением $\overline{u}(t)$).

Обычно рассматриваются функционалы следующего вида:

$$\mathscr{L}(\overline{Q}(t), \overline{u}(t)) = \int_0^T f^0(t, Q, u)\,dt + F(Q(T)), \tag{6}$$

где f^0 и F — заданные функции. Первое слагаемое в (6) оценивает качество процесса на возможных парах $(Q(t), u(t))$ на всем промежутке $[0, T]$; второе слагаемое (терминальная составляющая) — качество конечного состояния процесса. Если конечное состояние системы (т. е. желаемые расходы в створах от Токтогульской ГЭС до Кайраккумской ГЭС) задается, то терминальная составляющая в (6) есть величина постоянная и не влияет на минимизацию функционала (задача с фиксированным правым концом траектории). Для решения задачи оптимального управления воспользуемся достаточными условиями оптимальности, т. е. условиями, гарантирующими оптимальность допустимого процесса. Из математики известно, что достаточные условия довольно широки и для эффективного отыскания потенциально оптимальных процессов пытаются «сузить» исходное множество процессов с помощью необходимых условий оптимальности. Если ограничиваться применением достаточных условий, то нужна уверенность в их близости к необходимым. Излагаемый ниже подход удовлетворяет этому требованию.

Достаточные условия оптимальности формулируются следующим образом [3, 4]. Пусть $\varphi(t, Q)$ — непрерывная функция переменных t и Q, которая имеет по ним непрерывные частные производные и с помощью которой построим функции:

$$R(t, Q, u) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Q}, f(t, Q, u)\right) - f^0(t, Q, u); \tag{7}$$

$$\Phi(Q) = \varphi(T, Q) - F(Q), \tag{8}$$

где скобки во втором члене правой части (7) обозначают скалярное произведение. Введем обозначения: $(t, Q, u) \in V$, $(Q(t), u(t)) \in V^t$, $Q(t) \in V_x{}^t$, где V — подмножество, ограничивающее допустимые состояния; V^t — сечение V при заданном t (задает ограничение на $Q(t)$ и $u(t)$ в каждый фиксированный момент времени); $V_x{}^t$ — проекция V^t на пространство состояний. Пусть допустимый процесс $(Q(t), \overline{u}(t))$ и $\varphi(t, Q)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $R(t, \overline{Q}(t), \overline{u}(t)) = \max\limits_{(Q, u) \in V^t} R(t, Q, u)$ при всех $t \in [0, T]$;

2. $\Phi(\bar{Q}, (T)) = \min\limits_{Q \in V_x^T} \Phi(Q)$.

Тогда процесс $(\bar{Q}(t), \bar{u}(t))$ является оптимальным. Если конечное состояние задано $Q(T) = Q_к$, то область определения функции $\Phi(Q)$ — единственное значение $Q = Q_к$, которое и есть точка минимума, поэтому второе условие выполняется тривиально и отпадает.

Рассмотрим в качестве иллюстрации конкретный пример. Запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\tau} Q \pm \frac{1}{\tau} u_б + \frac{1}{\tau} u. \tag{9}$$

Пусть начальное и конечное значения расхода воды в Чильмахраме (т. е. состояние, в которое надо привести систему) заданы:

$$Q(0) = Q_0, \quad Q(T) = Q_1. \tag{10}$$

Предположим, что желаемый гидрограф в Чильмахраме (приток в Кайраккумское водохранилище) имеет вид

$$Q = Q_0 + bt^n. \tag{11}$$

Минимизируемый функционал (критерий качества) возьмем в следующем виде:

$$\int_0^T [(Q_0 + bt^n - Q)^2 + (Q_0 + bt^n) u] \, dt \to \min. \tag{12}$$

Подынтегральное выражение в (12) состоит из двух слагаемых, характеризующих качество процесса на всем интервале управления $[0, T]$. Первое слагаемое определяет квадрат невязки между желаемым $(Q_0 + bt^n)$ и допустимым (Q) изменениями расходов, а второе — произведение желаемой водоподачи в Кайраккумское водохранилище $(Q_0 + bt^n)$ и водоподачи с Токтогульской (или Учкурганской) ГЭС. Таким образом, физический смысл данного критерия заключается в желании сформировать такой процесс (пару $Q(t)$ и $u(t)$) на рассматриваемом участке, чтобы суммарное отклонение (интеграл квадрата невязки) желаемой водоподачи в Кайраккумское водохранилище от фактической и суммарный пропуск воды по входному и выходному створам данного участка были бы минимальными. В зависимости от конкретной ситуации этот критерий может иметь различный вид. Особенностью данного примера является линейная зависимость от управления правой части уравнения процесса (9).

В соответствии со сформулированными выше достаточными условиями оптимальности запишем функцию R:

$$R(t, Q, u) =$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial Q}\left(-\frac{1}{\tau} Q \pm \frac{1}{\tau} u_б + \frac{1}{\tau} u\right) - (Q_0 + bt^n - Q)^2 - (Q_0 + bt^n) u. \tag{13}$$

Надо подобрать функцию $\varphi(t, Q)$, чтобы процесс $(\bar{Q}(t), \bar{u}(t))$ при каждом t, максимизирующий выражение (13), был допустимым (а следовательно, и оптимальным, так как второе требование достаточных условий в силу (10) выполняется тривиально). Выберем функцию φ так, чтобы $R(t, Q, u)$ не зависела от управления. Так как R линейна по u (см. (13)), то ее независимость от управления означает равенство нулю коэффициента при u, т. е.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Q}\frac{1}{\tau} - Q_0 - bt^n = 0. \tag{14}$$

Найдя при каждом $t \max\limits_{Q} R(t, Q)$, получаем траекторию $\bar{Q}(t)$, которая в случае выполнения условий (10) является оптимальным решением. Соответствующее ему управление $\bar{u}(t)$ найдем из (9):

$$\bar{u}(t) = \frac{\dot{\bar{Q}}(t) + \frac{1}{\tau}\bar{Q}(t) \pm \frac{1}{\tau}u_б}{\frac{1}{\tau}}. \tag{15}$$

Функция $\varphi(t, Q)$ находится из (14):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Q} = \frac{Q_0 + bt^n}{\frac{1}{\tau}}; \tag{16}$$

$$\varphi(t, Q) = \int\limits_{Q} \frac{Q_0 + bt^n}{\frac{1}{\tau}} dQ + c(t), \tag{17}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени.

Учитывая (17), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \int\limits_{Q} nb\tau^{n-1} dQ + c'(t). \tag{18}$$

Учитывая (16) и (18), выражению (13) можно придать вид

$$R(t, Q) = \frac{(Q_0 + bt^n)\left(-\frac{1}{\tau}Q \pm \frac{1}{\tau}u_б\right) - (Q_0 + bt^n - Q)^2\frac{1}{\tau}}{\frac{1}{\tau}} +$$

$$+ nb\tau t^{n-1}Q + c'(t).$$

В этом выражении величины $u_б$ и $c'(t)$, не влияющие на функцию $Q(t)$, максимизирующую $R(t, Q)$, можно опустить. Делая алгебраические преобразования, получим

$$R(t, Q) = -Q^2 + Q(Q_0 + bt^n + nb\tau t^{n-1}). \tag{19}$$

Необходимым условием максимума будет

$$\left.\frac{\partial R}{\partial Q}\right|_{Q=\bar{Q}(t)} = -2Q + Q_0 + bt^n + nb\tau t^{n-1} = 0,$$

откуда

$$Q(t) = 0{,}5Q_0 + 0{,}5bt^n + 0{,}5nb\tau t^{n-1} \qquad (20)$$

(на $\bar{Q}(t)$ действительно достигается максимум, так как $\partial^2 R/\partial Q^2 = -2 < 0$).

Соответствующее траектории (20) управление получим из (15)

$$\bar{u}(t) = \tau\frac{d\bar{Q}}{dt} + \bar{Q} - u_б = 0{,}5bt^n + \tau nbt^{n-1} + + [\tau^2 0{,}5(n-1)nb]\,t^{n-2} + 0{,}5Q_0 - u_б. \qquad (21)$$

В общем случае полученный процесс ((20), (21)) может быть не только неоптимальным, но и вообще недопустимым, если не будут выполнены условия (10). В этом случае необходимо строить соответствующую минимизирующую последовательность, на чем мы не останавливаемся.

Пусть $n=1{,}52$; $b=32$; $Q_0=587$ (рассматривается период времени с 19 по 25 июня 1988 г.). С использованием полученных соотношений (20) и (21) построены соответствующие графики. Оказалось, что график полученного оптимального управления проходит ниже фактического. И хотя какие-либо количественные оценки из-за иллюстративного характера расчетов неуместны, но качественно ситуацию может объяснить неучет некоторых составляющих русловых водных балансов (например, фильтрация). Оценка расхода руслового регулирования (трансформационная составляющая), входящего в (21), $\tau dQ/dt$ показывает, что при времени релаксации $\tau=1{,}5$ сут и скорости нарастания расхода 60 м^3/(с·сут) он равен примерно 90 м^3/с, что составляет 10—10 % от расхода в замыкающем створе. Чем меньше скорость подачи воды с Учкурганской ГЭС, тем меньше воды надо тратить на управление. Если траекторию оптимального управления рассчитывать по стохастической модели (2), то в уравнении (21) появятся два дополнительных члена, связанных с наличием шумов $G_{\tilde{c}}$ и $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$. Учет $G_{\tilde{c}}$ приведет к тому, что вместо τ в законе управления (21) появится величина $2\tau/(2+G_{\tilde{c}})$. При уменьшении τ за счет учета $G_{\tilde{c}}$ на 30—40 % требуемый расход воды на управление сокращается на 5—8 %. Оценка вклада в РВБ члена $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ пока затруднена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коваленко В. В.* Моделирование гидрологических процессов. — СПб.: Гидрометеоиздат, 1993. — 256 с.
2. *Коваленко В. В., Старостин В. Л., Сергеев Ю. В.* Краткосрочный прогноз расходов воды среднего течения рек Амударья и Сырдарья. — В сб.: Моделирование и прогнозы гидрологических процессов. СПб.: изд. РГГМИ, 1992, вып. 113, с. 16—24.
3. *Кротов В. Ф. и др.* Основы теории оптимального управления. — М.: Высшая школа, 1990. — 430 с.
4. *Цирлин А. М. и др.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М.: Энергия, 1975. — 448 с.